

# Affectation dynamique, intersections et files d'attente

Vincent **AGUILÉRA** Fabien **LEURENT**  
Sergio **MILLAN LOPEZ** Antoine **TORDEUX**

Université Paris-Est — LABORATOIRE VILLE MOBILITÉ TRANSPORT

---

Séminaire IFSTTAR  
**Modélisation des réseaux de transport**

---

# Plan de la présentation

## §1 *Affectation*

- statique
- dynamique: modèle LADTA

## §2 *Écoulement*

- file d'attente verticale
- écoulement multiclasse
- file d'attente horizontale

## §3 *Intersections*

- contraintes physiques
- modèle FIFO
- modèle maximisation débit

Introduction

**Affectation**

Écoulement sur un arc

Écoulement sur une intersection

Conclusion

## Affectation statique

### ► *Notations*

- $x_a$  : débit sur l'arc  $a$
- $t_a = f(x_a)$  : temps de parcours de l'arc  $a$
- $q_{o,d}$  : débit de demande entre l'origine  $o$  et la destination  $d$
- $R_{o,d}$  : ensemble des chemins de  $o$  vers  $d$

### ► *Affectation à l'équilibre usager*

On cherche des débits sur les chemins tels que :

- la demande est satisfaite :  $\forall(o, d), \sum_{r \in R_{o,d}} x_r = q_{o,d}$
- les chemins utilisés sont optimaux :  $\forall(o, d), \forall r \in R_{o,d}, x_r > 0 \Rightarrow t_r = \min \{t_{r'}, r' \in R_{o,d}\}$ , avec  $t_r = \sum_{a \in r} t_a$

### ► *Résolution*

Se formule et se résoud classiquement comme un problème d'optimisation convexe

## Affectation dynamique: LADTA

- ▶ Extension dynamique "minimale" de l'affectation statique
- ▶ Modèle analytique
- ▶ *Notations*
  - $X_a^+(h) =$  : volume cumulé en entrée de l'arc  $a$
  - $T_a = F(X_a^+, K_a)$  : temps de parcours de l'arc  $a$
  - $Q_{o,d}(h)$  : volume de demande entre  $o$  et  $d$
- ▶ *Affectation à l'équilibre usager*

On cherche des débits sur les chemins tels que :

- demande satisfaite :  $\forall(o, d), \forall h, \sum_{r \in R_{o,d}} X_r(h) = Q_{o,d}(h)$
- chemins utilisés optimaux :  $\forall(o, d), \forall r \in R_{o,d}, \forall h, \dot{X}_r(h) > 0 \Rightarrow T_r(h) = \min \{T_{r'}(h), r' \in R_{o,d}\}, T_{r=(a,r')}(h) = T_a(h) + T_{r'}(h + T_a(h))$
- ▶ *Résolution*
  - pas de schéma standard
  - LADTA: on cherche un point fixe  $T_A^* = \mathcal{F}(\mathcal{V}(Q, \mathcal{R}(T_A^*), T_A^*))$

# Exemple

## ➤ Problème

### OFFRE

$t_0 = 0.5$  h  
 $k = 500$  veh/h  
 $t_0 = 1.0$  h  
 $k = 2000$  veh/h



### DEMANDE

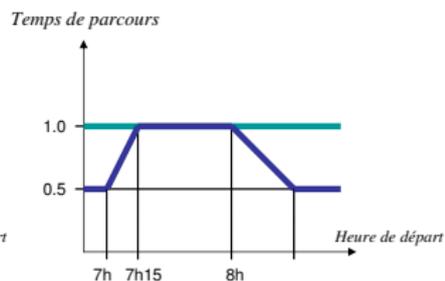
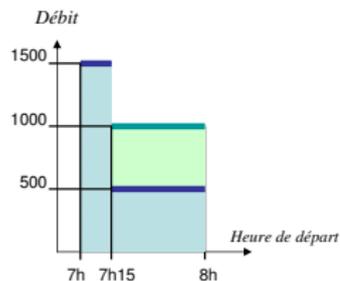
1500 veh/h entre 7h et 8h

### COMPORTEMENT

Choix de l'itinéraire de temps de parcours minimal

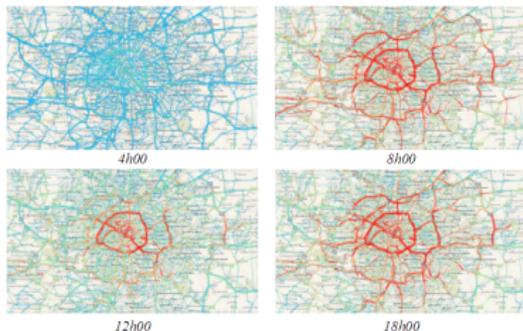
## ➤ Solution

### ÉQUILIBRE OFFRE-DEMANDE



# Applications

## Émissions de polluants.



Distribution spatiale et temporelle des émissions de monoxyde de carbone correspondant aux déplacements intra-franciliens effectués en véhicules particuliers. Émissions calculées avec le module "émissions" du LTK, à partir des débits et vitesses obtenus après affectation à l'équilibre, pour une demande correspondant à un jour moyen estimé à partir de données DiRIF et EGT2001.

Exemple potentiel: estimer les impacts sur le trafic et sur les populations riveraines d'une fermeture des voies sur berge à Paris.

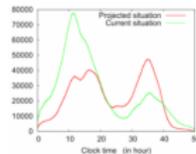
## Modulation horaire de péages.

Exemple d'application du module "choix d'horaire de départ" du LTK, pour une demande estimée à partir des données de billettique des 14 et 15 juillet 2008.



Niveaux de congestion atteints en Vallée du Rhône, à 11h le 14 juillet, sans et avec modulation tarifaire.

En rouge, les tronçons pour lesquels une modulation horaire est simulée.



Débit horaire total au départ depuis toutes les origines. En vert: sans modulation. En rouge: avec modulation.

Le pic de demande du 14 est retardé, écrêté, et en partie reporté au 15.

# Implémentation actuelle, extensions

- ▶ *LTK: Ladta ToolKit*
  - traitements efficaces de grands réseaux
  - calculs distribués
  - affectations multiclassés (ex: vl+pl)
  
- ▶ *Extensions*
  - intersections
  - files d'attentes horizontales

Introduction

Affectation

Écoulement sur un arc

Écoulement sur une intersection

Conclusion

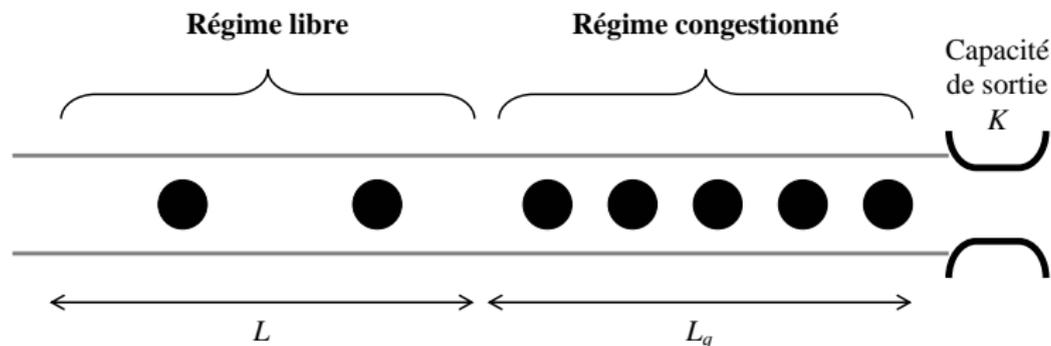
## Modèle d'écoulement avec files d'attente verticales

- ▶ *Entrées (sur un arc) :*
  - $\{X_u^+(h), u \in U\}$  : volumes cumulés par classe de véhicules, en entrée d'arc
  - $\{T_{0,u}(h), u \in U\}$  : temps de parcours de l'arc à vide
  - $K(h)$  : débit maximal en sortie d'arc
  
- ▶ *Sorties :*
  - $T_{p,u}(h) = T_{0,u}(h) + T_q(h + T_{0,u}(h))$  : temps de parcours de l'arc avec  $T_q$  le temps passé en file d'attente
  
- ▶ *Principe de calcul*
  - Calculer  $Y = \sum_{u \in U} Y_u$ : volume entrant en file d'attente, avec  $Y_u$  t.q.  $Y_u(h + T_{0,u}(h)) = X_u^+(h)$
  - $T_q$  minimise  $T_p \geq 0$  sous les contraintes  $h + T_{p,u}(h) \nearrow h$  (FIFO) et  $Z(h) \leq K(h)$ , avec  $Z$  t.q.  $Z(h + T_q(h)) = Y(h)$

# Modèle d'écoulement avec files d'attente horizontales

- ▶ *Entrées (sur un arc) :*
  - $\{X_u^+(h), u \in U\}$ : volumes cumulés par classe de véhicules, en entrée d'arc
  - $\{T_{0,u}(h), u \in U\}$ : temps de parcours de l'arc à vide
  - $K(h)$ : débit maximal en sortie d'arc
- ▶ *Sorties :*
  - $\{T_{p,u}(h), u \in U\}$ : temps de parcours
- ▶ Formation de files d'attente horizontales en fin d'arc
  - ↪ Temps de parcours de la partie libre fonction de la longueur de la file d'attente

## Schéma de l'écoulement sur un arc



- ▶  $n_q$  est le nombre d'unité véhiculaire en file d'attente,  $n_m$  est le nombre d'unités maximal (la capacité de stockage)
- ▶ Niveau de densité constant en file d'attente ( $= n_m/L_0$  avec  $L_0$  la longueur de l'arc) implique :

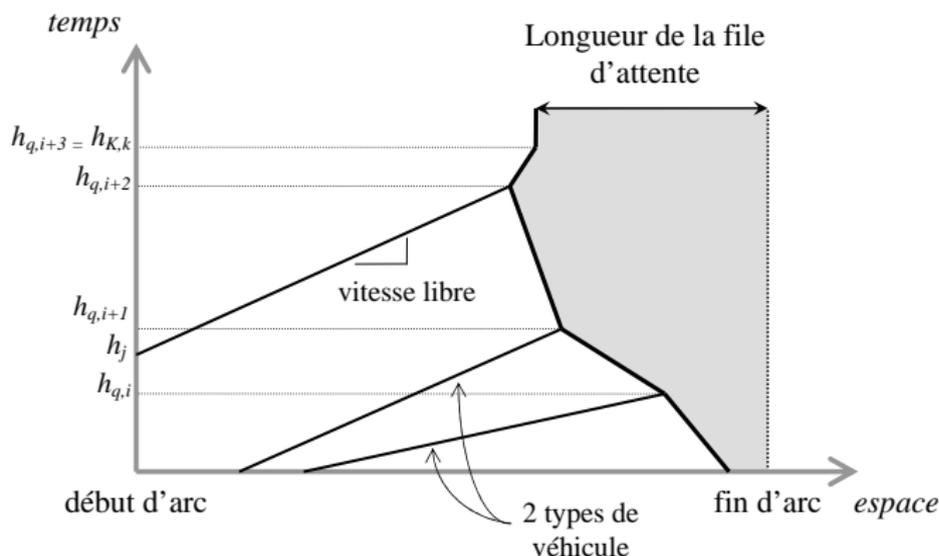
$$L_q(h) = L_0 \times n_q(h)/n_m(h)$$

## Calcul du nombre d'unité véhiculaire en file d'attente

- ▶ Définition événementielle en temps croissant à partir des profils  $(X_u^+)_u$ ,  $(T_{0,u})_u$  et  $K$
- ▶ Sur un intervalle de temps où le débit entrant en file d'attente  $D$  et la capacité de sortie  $K$  sont constants,  $n_q$  varie à vitesse  $D - K$  constante (en restant positif ou nul)
  - ↪  $D$ : information contenue dans les  $(X_u^+)_u$  retardés du temps de parcours de la partie libre
- ▶ On calcule  $(h_{q,i})_i$  les instants pour lesquels le gradient de  $n_q$  varie
  - ↪ Pour tout  $0 \leq i < I$ ,  $h \in ]h_{q,i}, h_{q,i+1}[$  :

$$n_q(h) = n_q(h_{q,i}) + [D(h_{q,i}) - K(h_{q,i})](h - h_{q,i})$$

# Schéma de calcul de la longueur de la file d'attente



- Les  $(h_j)_j$  et  $(h_{K,k})_k$  sont les instants de saut des débits cumulés entrant dans l'arc  $(X_u^+)_u$  et de la capacité de sortie  $K$

## Calcul des temps de parcours par type

- ▶ Calcul des temps de parcours d'un arc  $(T_{p,u})_u$  par type de véhicules à partir des  $(T_{0,u})_u$  et de  $n_q$  :

$$T_{p,u}(h) = T_u(h) + T_q(h + T_u(h))$$

avec  $T_u$  le temps de parcours de la partie libre :

$$T_u(h) = \inf \left\{ t, \int_h^{h+t} L_0 / T_{0,u}(u) du \geq L(h+t) \right\}$$

et  $T_q$  le temps de parcours de la file d'attente :

$$T_q(h) = \inf \left\{ t, \int_h^{h+t} K(u) du \geq n_q(h) \right\}$$

- ▶ Contrainte FIFO: pour tout  $u$ ,  $h + T_{p,u}(h) \nearrow_h$

Introduction

Affectation

Écoulement sur un arc

**Écoulement sur une intersection**

Conclusion

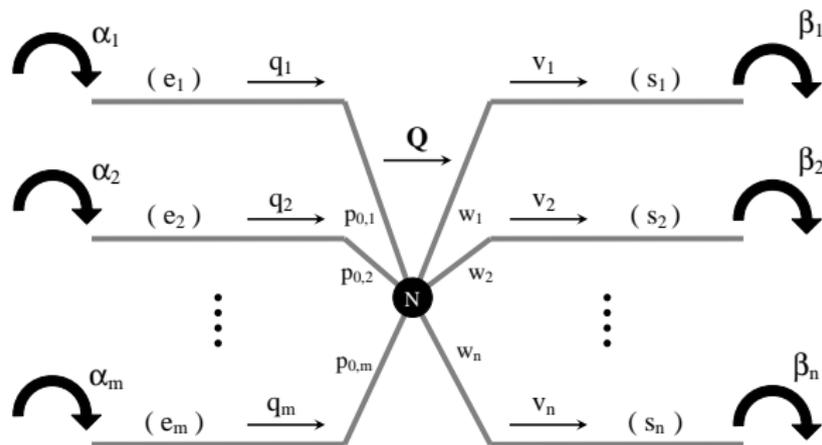
## Calcul de la capacité de sortie d'un arc

- ▶ Le calcul du temps de parcours d'un arc nécessite la capacité de sortie  $K(h)$  d'un arc
- ▶ La capacité de sortie  $K(h)$  d'un arc dépend de l'état du noeud aval et de l'ensemble des arcs connectés à ce noeud

↪  $K(h)$  est fonction :

- $K_0(h)$  la capacité intrinsèque (en tout point de l'arc)
- de l'état en sortie des arcs entrants  $(e_1(h), \dots, e_m(h))$  et en entrée des arcs sortants  $(s_1, \dots, s_n)$  du noeud aval
- des proportions  $(w_1(h), \dots, w_n(h))$ ,  $\sum_j w_j(h) = 1$ , du flux sur l'intersection par sortie
- des proportions  $(p_{0,1}(h), \dots, p_{0,m}(h))$ ,  $\sum_i p_{0,i}(h) = 1$ , spécifiant les règles de priorité des arcs entrants

## Schéma d'un noeud et variables utilisées



- ▶ On considère le noeud comme une intersection ponctuelle (sans capacité de stockage, instant d'entrée = instant de sortie)
- ▶  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  demandes des arcs entrants et  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  offres des arcs sortants

## Contraintes requises

► Contraintes physiques «nécessaires» et naturelles mais ne permettant pas de définir de manière unique les débits :

- Contraintes de positivité et de frontière :

$$\left| \begin{array}{l} \forall i \quad 0 \leq q_i \leq \alpha_i \\ \forall j \quad 0 \leq v_j \leq \beta_j \end{array} \right.$$

- Contrainte de conservation :  $| Q = \sum_i q_i = \sum_j v_j$

- Contraintes d'invariance<sup>1</sup> :

$$\left| \begin{array}{ll} \forall i, q_i < \alpha_i & q_i \text{ invariant si } \alpha_i \nearrow K_0 \\ \forall j, v_j < \beta_j & v_j \text{ invariant si } \beta_j \nearrow K_0 \end{array} \right.$$

► Contrainte sur le comportement du flux sur l'intersection (FIFO, maximisation débit...)

---

<sup>1</sup>LEBACQUE J.P., KHOSHYARAN M.M. (2005) First order macroscopic traffic flow models: intersection modelling, network modelling *16th ISTTT*

## Modèle d'écoulement FIFO sur l'intersection

- Calcul des débits  $Q$ ,  $(q_i)_i$  et  $(v_j)_j$  à partir des demandes  $(\alpha_i)_i$ , des offres  $(\beta_j)_j$  et des proportions  $(p_{0,i})_i$  et  $(w_j)_j$ <sup>2,3</sup> :

$$\begin{cases} Q = \min \left\{ \sum_i \alpha_i, \min_j \beta_j / w_j \right\} \\ v_j = w_j Q \\ q_i = \min \{ \alpha_i, p_{0,i} \sigma \} \quad \text{avec } \sigma \text{ sol. de } Q = \sum_i \min \{ \alpha_i, p_{0,i} \sigma \} \end{cases}$$

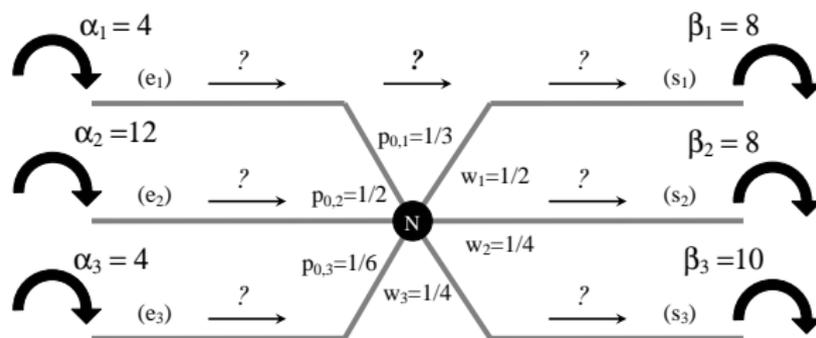
- Contrainte FIFO  $\Rightarrow$  le débit sur l'intersection est nul dès que l'offre d'une sortie affectée est nulle
- $\sigma \in [Q, \min_i Q/p_{0,i}]$  existe et est unique lorsque  $Q < \sum_i \alpha_i$
- Par construction  $w_j = v_j / \sum_j v_j$

---

<sup>2</sup>JIN W.L., ZHANG H.M. (2002) On the distribution schemes for determining flows through a merge *Transp. Res. B* **37(6)**

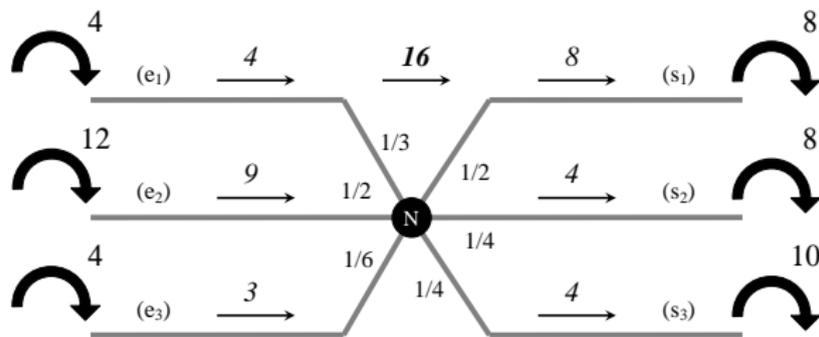
<sup>3</sup>DAGANZO C.F. (1995) The cell transmission model. Part II: Network traffic. *Transp. Res. B* **29(2)**

## Un exemple résolu



- ▶ Exemple d'une intersection à trois entrées et trois sorties
- ▶ On a  $\sum_i \alpha_i < \sum_j \beta_j$

## Un exemple résolu



- ▶ Intersection congestionnée :  
 $Q = \min \{ \sum_i \alpha_i, \min_j \beta_j / w_j \} = \beta_1 / w_1 = 16 < \sum_i \alpha_i = 20$
- ▶ Sortie  $s_1$  régule les débits :  $v_1 = \beta_1 = 8$  et  
 $v_{2(3)} = w_{2(3)} / w_1 \beta_1 = 4$  ( $w_2 = w_3 = 1/4$ )
- ▶ Situation libre sur l'entrée  $e_1$  :  $q_1 = \alpha_1 = 4$ , et  
 congestionnée sur les entrées  $e_2$  et  $e_3$  :  $q_i = p_{0,i} \sigma$  ( $q_2 = 9$ ,  
 $q_3 = 3$  et  $\sigma = 18$ )

## Modèle maximisant le débit sur l'intersection

- Maximisation des débits sous contraintes liées aux conditions frontières<sup>4,5</sup> :

$$\begin{cases} v_j = \min \left\{ w_j \sum_i \alpha_i, \beta_j \right\} \\ Q = \sum_j v_j \\ q_i = \min \{ \alpha_i, p_{0,i} \sigma \} \quad \text{avec } \sigma \text{ sol. de } Q = \sum_i \min \{ \alpha_i, p_{0,i} \sigma \} \end{cases}$$

- Écoulement indépendant sur l'intersection par sortie
- Débit sur l'intersection majore le débit du modèle FIFO :

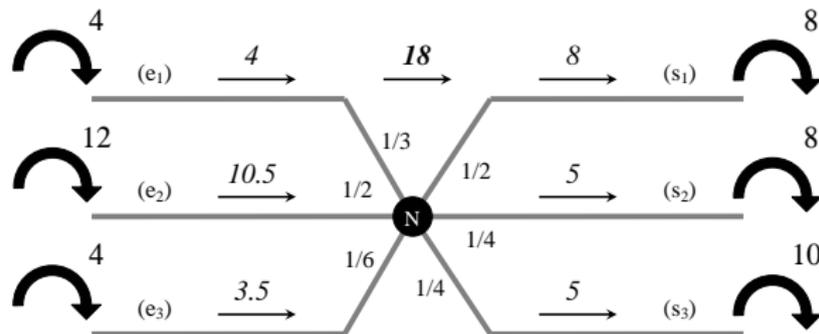
$$\begin{aligned} \sum_j \min \{ w_j \sum_i \alpha_i, \beta_j \} &= \sum_j w_j \min \{ \sum_i \alpha_i, \beta_j / w_j \} \\ &\geq \sum_j w_j \min \{ \sum_i \alpha_i, \min_j \beta_j / w_j \} = \min \{ \sum_i \alpha_i, \min_j \beta_j / w_j \} \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>JIN W.L., ZHANG H.M. (2002) On the distribution schemes for determining flows through a merge *Transp. Res. B* **37**(6)

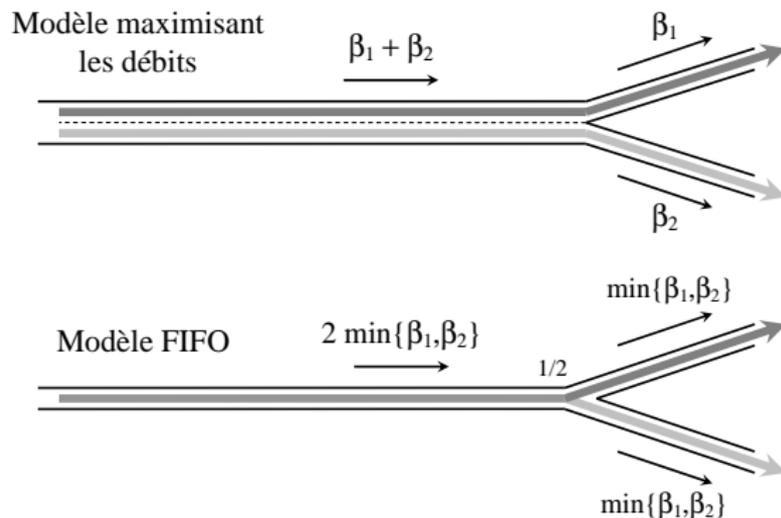
<sup>5</sup>BUISSON C., LEBACQUE J.P., LESORT J.B. (1995) Macroscopic modelling of traffic flow and assignment in mixed networks. *6th ICCCB*

## Un exemple résolu



- ▶ Intersection congestionnée :  $Q = 18 < \sum_j \alpha_j$
- ▶ Situation libre sur l'entrée  $e_1$  et congestionnée sur les entrées  $e_2$  et  $e_3$  :  $q_1 = \alpha_1$  et  $q_i = p_{0,i}\sigma$ ,  $i = 2, 3$ ;  $\sigma = 21$

## Schéma des modèles divergents



- ▶ Maximisation du débit: écoulement indépendant par sortie (voie de sortie sur une autoroute)
- ▶ FIFO: cas d'une voie unique se séparant (rond-point)

## Application au modèle d'écoulement sur un réseau

- ▶ L'objectif est de calculer la capacité de sortie  $K$  des arcs entrants en un même noeud
- ▶ Définition des paramètres du modèles d'intersection à partir de  $(X_u^+)$ ,  $n_q$ ,  $(T_{0,u})$  et des capacités  $K$  des arcs sortants :

$$\alpha(h) = \begin{cases} K_0(h) & \text{si } n_q(h) > 0 \\ \sum_u (X_u^+(h - T_{0,u}))' & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta(h) = \begin{cases} K_0(h) & \text{si } n_q(h) < n_m(h) \\ K(h) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\rho_{0,i}(h) = \frac{K_{0,i}(h)}{\sum_i K_{0,i}(h)} \quad \text{et} \quad w_j(h) = \frac{\sum_u (X_{u,j}^+(h))'}{\sum_j \sum_u (X_{u,j}^+(h))'} \quad (\text{cas FIFO})$$

$$\rightsquigarrow K(h) = \begin{cases} K_0(h) & \text{si } Q(h) = \sum_i \alpha_i(h) \\ \rho_{0,i}(h)\sigma(h) & \text{sinon} \end{cases}$$

Introduction

Affectation

Écoulement sur un arc

Écoulement sur une intersection

Conclusion

# Conclusions et perspectives de travail

## ► **Conclusions**

- Modèle multi-classes opérationnel sur des réseaux routiers de taille importante
- Choix des itinéraires et des heures de départ dynamiques
- Écoulement propageant en amont les congestions

## ► **Perspectives de travail**

- Identification des paramètres du modèle aux différents types d'intersections
- Simulation et comparaison des performances obtenues à des mesures réelles
- Application du modèle à l'estimation d'émission de polluants et de consommation de carburants